数理解析研究所講究録
392巻 1980年 53-57

加法定理（予想 C_n）

東大 理　角田秀一郎

加法定理　$f: X \to Y$ を代数的ファイバー空間，$\kappa(X) \geq 0$，$\kappa(Y) = \dim Y$ ならば，$\kappa(X) = \kappa(F) + \kappa(Y)$。ここでFはfの一般ファイバー $f^{-1}(y)$.

証明　まず $P_g(X) \neq 0$ の場合に帰着させる。m を $P_m(X) \neq 0$ なる正整数とする。$\mathcal{U} = \{U_i\}$ をXのアフィン開被覆，φ_{ij} を K_X の $\mathcal{U}$ に関する変換関数とする。f_i を mK_X の非零切断に対応する U_i 上の関数で，$f_i = \varphi_{ij}^m f_j$ をみたすものとする。$U_i' = \{(x, t) \in U_i \times \mathbb{C} \mid t^m = f_i(x)\}$ とおけば，U_i' たちは，代数多様体 K_X の代数的集合 X' をつくる．X^* を X' の既約成分の非特異化，$\pi: X^* \to X$ を射影とすれば，X^* の構成法から，$H^0(X^*, \pi^* K_X) \neq 0$，$R_\pi$ を π の分岐因子とすれば，$N \geq 0$ に対して，$0 \leq R_\pi \leq N\pi^* K_X$．したがって，$\kappa(X^*) = \kappa(X)$。一方，$X^* \xrightarrow{f_1} Y^* \to Y$ を $f \circ \pi$ のスタイン分解とすれば，$\kappa(Y^*) \geq \kappa(Y)$，$\kappa(F^*) \geq \kappa(F)$，$F^*$ は f_1 の一般ファイバー。

とって、$X^* \longrightarrow Y^*$ について加法定理を示せばよいので、はじめから、$P_g(X) \neq 0$ としてよい。

F を f の一般ファイバーとすれば、$P_g(X) \neq 0$ より $P_g(F) \neq 0$。$f: X \longrightarrow Y$ はモデルをとりかえることにより、中単化定理の系の仮定をみたすとしてよい。そこで、次の可換図式をとる。

$$
\begin{array}{ccc}
X & \xrightarrow{f} & Y \\
{\scriptstyle p}\uparrow & & \uparrow{\scriptstyle g} \\
X_1 = X \times_Y \tilde{Y} & \xrightarrow{f_1} & \tilde{Y} \\
{\scriptstyle \mu}\nearrow & \nearrow{\scriptstyle \tilde{f}} & \\
\tilde{X} & &
\end{array}
$$

以下 F, D, $\tilde{D}$ その他も中単化定理の系と同様とする。

主補題によれば、$\tilde{f}_* K_{\tilde{X}/\tilde{Y}}$ は局所自由かつ半正値な層で、$P_g(F) \neq 0$ より非零がわかる。

補題[1]. L を非常に豊富な $\tilde{Y}$ 上の因子とする。このとき、正整数 m が存在し、$H^0(\tilde{Y},\ m g^* K_Y - L) \neq 0$

$P = \mathbb{P}(\tilde{f}_* K_{\tilde{X}/\tilde{Y}})$ とおき、$\pi: P \to \tilde{Y}$ を射影とする。（とHの基本因子とすると、）H は半正値、すなわち C を P 上の曲線とすれば、$(H.C) \geqq 0$。$\nu: C^* \longrightarrow C$ を非特異化とする。π は $\varphi: C^* \longrightarrow \tilde{Y}$、$\varphi^* \tilde{f}_* K_{\tilde{X}/\tilde{Y}}$ の商可逆層を誘導するが、それは $\nu^* H$ に他ならない。したがって、$(H.C) = \deg_{C^*} \nu^* H \geqq 0$。

次の定理を使って、$mH + \pi^* L$ は豊富を示す。

定理（セシャドリの判定法）[2].

Sを完備代数多様体，DをS上のCartier因子．このとき，Dが豊富である必要十分条件は，正数εが存在して，S上の任意の曲線に対し，$(D, C) \geqq \varepsilon(m(C))$。ここで $m(C)=\max_{p\in C} m_p(C)$，とおいた。

Lは豊富なので，正数ε_1が存在して，Y上の曲線Cに対し，$(L, C) \geqq \varepsilon_1(m(C)$．πのファイバーは，射影空間で，Hをファイバーに制限すると，超平面になる．したがって，πのファイバーにふくまれる曲線Cに対し，$(H, C) \geqq m(C)$。

CをP上の曲線とする。Cがπのファイバーにふくまれれば，
$(mH+\pi^*L, C) = m(H, C) \geqq m \quad m(C) \geqq \quad m(C)$。
$\pi(C)=C_0$が曲線であれば，$(mH+\pi^*L, C) \geqq (\pi^*L, C)$
$= [C:C_0](L, C_0) \geqq [C:C_0]\,\varepsilon_1\, m(C_0) \geqq \varepsilon_1\, m(C)$
ここで$[C:C_0]$は $\pi: C\to C_0$ の写像度を表わす。
よって，セシャドリの判定法により，$mH+\pi^*L$は豊富．
gは平坦であるから，平坦基底変換定理により，$K_{X_1/Y}=p^*K_{X/Y}$。
したがって，$K_{X_1}=p^*K_{X/Y}\otimes f_1^*K_Y$ となり，X_1はゴレンスタインに，次の命題によれば，$\mathrm{Hom}(\mu_*K_X, K_{X_1})\neq 0$がわかる。

命題[3]．$f: M\to V$を全射正則写像とする。ここにM, Vは次元の等しい，局所マコーレー完備代数多様体。

そのとき，$\mathrm{Hom}(f_*\omega_M, \omega_V)\neq 0$。ここに$\omega_M$と$\omega_V$は dualizing sheaf.

次の準同型がつくれる.

$$\mathrm{Sym}_{\hat{Y}}\hat{f}_*K_{\hat{X}/\hat{Y}} \longrightarrow \mathrm{Sym}_{\hat{Y}} f_{1*}K_{X_1/\hat{Y}} \to \sum_{n\geq 0} f_{1*}(nK_{X_1/\hat{Y}})$$

上の準同型は，Pの部分スキームRを定め，$\pi: R\to\hat{Y}$を誘導する．$\dim\hat{Y}=0$なら主張は自明．$\dim\hat{Y}>0$とし，$y_1, y_2\in\hat{Y}$を異なる点，r_1, r_2をRの点でそれぞれy_1, y_2におちるとする．$mH+\pi^*L$は豊富であるから正整数nと$n(mH+\pi^*L)$の切断s_1, s_2が存在し，$s_1|_{\pi^{-1}(y_1)}=0$, $s_1(r_2)\neq 0$, $s_2|_{\pi^{-1}(y_2)}=0$, $s_2(r_1)\neq 0$. $H^0(P, n(mH+\pi^*L)) = H^0(\hat{Y}, \mathrm{Sym}^{nm}\hat{f}_*K_{\hat{X}/\hat{Y}}\otimes nL)\to H^0(\hat{Y}, f_{1*}(nmK_{X_1/\hat{Y}})\otimes nL)$により，$s_1, s_2$は$H^0(\hat{Y}, f_{1*}(nmK_{X_1/\hat{Y}})\otimes nL)$の切断$\omega_1, \omega_2$を誘導する．$s_1, s_2$の性質から，$\omega_1(y_1)=0$, $\omega_1(y_2)\neq 0$, $\omega_2(y_2)=0$, $\omega_2(y_1)\neq 0$. したがって，$h^0(\hat{Y}, f_{1*}(nmK_{X_1/\hat{Y}})\otimes nL)\geqq 2$. よって，$\kappa(nmK_{X_1/\hat{Y}}\otimes nf_1^*L, X_1)>0$

$\Rightarrow \kappa(nmK_{X_1/\hat{Y}}\otimes mf_1^*g^*K_Y, X_1)>0$

$\Rightarrow \kappa(p^*K_X, X_1)>0 \Rightarrow \kappa(X)>0$.

$\Phi: X\to Z$を飯高ファイバリング，Gを$(f,\Phi): X\to Y\times Z$の像とする．Zの一般超平面切断の共通部分Z'をとって，$Y^*=G\times_Z Z'$がY上支配的かつ次元が等しくできる．$\dim Y^*\geq\kappa(Y^*)\geq\kappa(Y)=\dim Y=\dim Y^*$より$\kappa(Y^*)=\dim Y^*$が従う．$Y^*\to Z'$の一般ファイバーは$f(\Phi^{-1}(z))$ $(z\in Z')$. $Y^*\to Z'$に基本不等式を使う $\kappa(Y^*)\leq\kappa(f\Phi^{-1}(z))+\dim Z'$より $\kappa(f\Phi^{-1}(z))=\dim f\Phi^{-1}(z)$

$\Phi^{-1}(z) \longrightarrow f(\Phi^{-1}(z))$を考えると，$\dim f\Phi^{-1}(z)>0$であれば，上に証明したことにより，$\kappa(\Phi^{-1}(z))>0$でなければならず，$\kappa(\Phi^{-1}(z))=0$に矛盾，したがって，$\dim f\Phi^{-1}(z)=0$．よって，有理写像$g: Z \to Y$が存在して，$f=g\cdot\Phi$。モデルをとりかえて，$g$は正則写像としてよい．$y \in Y$を一般点とし$f^{-1}(y) \longrightarrow g^{-1}(y)$に基本不等式（弱加法性）をつかって，$\kappa(f^{-1}(y)) \leq \kappa(\Phi$のfiber$) + \dim g^{-1}(y)$。$\dim g^{-1}(y) = \dim Z - \dim Y = \kappa(X) - \kappa(Y)$ よって，$\kappa(F) \leq \kappa(X) + \kappa(Y)$

一方基本不等式から，$\kappa(X) \leq \kappa(F) + \kappa(Y)$．

したがって $\kappa(X) = \kappa(F) + \kappa(Y)$ Q. E. D.

文　献

[1] K. Kodaira: Holomorphic mappings of polydiscs into compact complex manifolds, J. Diff. Geo., 6 (1971), 33-46

[2] R. Hartshorne: Ample Subvarieties of Algebraic Varieties; Springer Lecture Notes in Math. 156. P37.

[3] T. Fujita: On Kähler fiber spaces over curves, J. Math. Soc. Japan. Vol 30, No 4, 1978 779-794